Prof. Dr. Alfred Toth

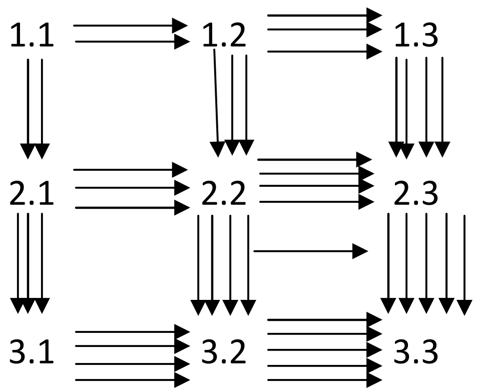
Multisimpliziale Mengen als Prägarben

1. Unter einer Garbe (abelscher Gruppen) über einem topologischen Raum versteht man jede offene Teilmenge des Basisraumes, welche bestimmten Restriktionshomoorphismen unterliegt. Im Gegensatz zu einer Garbe besitzt eine Präarbe keine „lokalen Daten“ (vgl. Miraglia 2006). Zu semiotischen abelschen Gruppen vgl. Toth (2006, S. 37 ff.), zu semiotischen Bündeln und Garben vgl. Toth (2006, S. 29 f.).

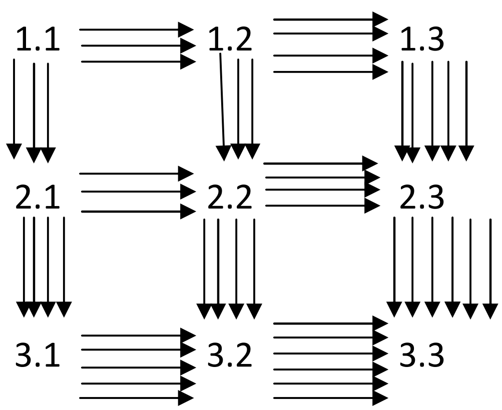
2. Die Darstellung multisimplizialer Mengen als Prägarben kann in der Semiotik mit einem gewissen theoretischen Gewinn deshalb benutzt werden, da man aus ihr bestimmte Algorithmen abeiten kann, mit denen sich alternative Darstellungen semiotischer Matrizen (und damit der Ordnungsstruktur der Subzeichen) ergeben. Dabei wird anstatt von (gewöhnlichen) von n-Kategorien ausgegangen, d.h. von höheren Kategorien, die mehrfache Inputs bei stets einem einzigen Output zulassen (vgl. Cheng/Lauda 2004, S. 2 ff.). Während also bei 1-Kategorien von einem Domänen-Element $a \in A$ zu einem Codomänen-Element $b \in B$ stets ein einziger, genau bestimmter Morphismus führt, gibt es eine Menge von Morphismen zwischen $a, b, c, ..., n \in A$ und $b \in B$ bei n-Kategorien.

3. Die Prägarben-Darstellung funktioniert, wie ich nun zeige, auf drei Arten: Man kann die Anzahl von zwischen A(Dom) und B(Codom) abbildenden Morphismen 1. von der Domäne und 2. von der Codomäne abhängig machen. 3. Kann man mit Hilfe der Prägarben-Darstellung semiotische Matrizen so ordnen, dass die Umgebungen eines Subzeichens (a.b) stets genau einer der folgenden Fälle umfasst: (a+1.b), (a.b+1), (a-1.b), (a.b-1).

3.1. A(Dom)-induierte Prägarben-Darstellung



3.2. B(Codom)-induierte Prägarben-Darstellung



Für die Umgebungen jedes (a.b) gilt also

U(a.b) (A-Dom) = U(a(+1).b(+1)) (B-Codom)

bzw.

U(a.b) (B-Codom) = U(a(-1).b(-1)) (A-Dom)

3.3. Damit sind jedoch die (a.b) selber redundant, wenn die Prägärben sind für jedes (a.b) bzw. U(a.b) eindeutig bestimmt. Semiotisch kann man damit die Subzeichen vollständig durch Prägarben ersetzen (und damit eine interessante kategorietheoretische Grothendieck-Topologie konstruieren!). Wenn wir nun die kleine semiotische Matrix Benses so ordnen, dass für jedes (a.b) einer der folgenden 4 Fälle gilt

(a+1.b), (a.b+1), (a-1.b), (a.b-1),

dann erhalten wir z.B. folgende Darstellung unter mehreren (wobei die Aufgabe in der Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Darstellungen und ihrem gegenseitigen Nicht-Isomorphie-Beweis beruht):

$$\begin{pmatrix} \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 3.3 & 2.3 & 2.2 \\ 3.2 & 3.1 & 2.1 \\ 1.3 & 1.2 & 1.1 \end{pmatrix}$$

Bibliographie

Cheng, Eugenia/Lauda, Aaron, Higher-dimensional categories. IMA-Workshop, University of Cambridge, 2004

Miraglia, Francisco, An introduction to partially ordered structures and sheaves. Monza 2006

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

19.8.2010